1. $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}$.

Заметим, что числитель в точности совпадает с производной от знаменателя. Заменим знаменатель на новую переменную: $t=x^2-x+1 \Rightarrow dt=(x^2-x+1)'dx=(2x-1)dx$. Теперь

$$\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|x^2-x+1|+C = \ln\left(x^2-x+1\right)+C .$$

Модуль в ответе опущен, поскольку выражение под модулем было неполным квадратом и, следовательно, всегда положительным.

2. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$

Теперь сделаем замену переменной: $t=x+2 \Rightarrow dt=(x+2)'dx=1dx=dx$. И, следовательно, продолжение решения: $= \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x+2)+C$.

3. $\int \cos^2 2x\, dx$.

Воспользуемся формулой понижения степени $\cos^2\alpha=1/2(1+\cos(2\alpha))$.

$$\int \cos^2 2x\, dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

Сделаем замену переменной: $t=4x \Rightarrow dt=(4x)'dx=4dx \Leftrightarrow dx=(1/4)dt$.
Теперь интеграл равен:

$$= \int \frac{1+\cos t}{2} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{8}\int (1+\cos t)dt = \frac{1}{8}(t+\sin t)+C = \frac{1}{8}(4x+\sin 4x)+C .$$

4. $\int \sin^3 2x \cdot \cos 2x\, dx$.

Сделаем замену переменных: $t=\sin 2x \Rightarrow dt=(\sin 2x)'dx=2\cos 2x\cdot dx \Rightarrow \cos 2x\cdot dx=$ $=(1/2)dt$. Тогда $\int \sin^3 2x \cdot \cos 2x\, dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C = \frac{\sin^4 2x}{8}+C$.

5. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} =$

Сделаем замену переменных: $t=\operatorname{tg}(x/2) \Rightarrow dt=(\operatorname{tg}(x/2))'dx=(1/2)\cdot(1/\cos^2(x/2))dx$. *Тогда*

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C .$$

6. $\int \frac{dx}{2+e^x} = \int \frac{\frac{1}{2}(2+e^x-e^x)\,dx}{2+e^x} = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{e^x}{2+e^x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int\frac{e^x dx}{2+e^x}\right) =$

Сделаем замену переменных: $t=2+e^x \Rightarrow dt=(2+e^x)'dx=e^x\cdot dx$. *Тогда*

$$= \frac{1}{2}\left(x-\int\frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{2}(x-\ln|t|)+C = \frac{1}{2}(x-\ln|2+e^x|)+C = \frac{1}{2}(x-\ln(2+e^x))+C .$$

7. $\int (x^2+x-1)e^x\, dx$.

Применим формулу интегрирования по частям. Обозначим $u=x^2+x-1$, $dv=e^x dx$, тогда $du=(x^2+x-1)'dx=(2x+1)dx$, $v=e^x$.

$$\int (x^2+x-1)e^x\, dx = (x^2+x-1)e^x - \int (2x+1)e^x dx = .$$

Придётся повторно применить правило интегрирования по частям: $u=2x+1$, $dv=e^x dx$, тогда $du=(2x+1)'dx=2dx$, $v=e^x$.

$$=(x^2+x-1)e^x-\left((2x+1)e^x-\int 2e^x dx\right)=(x^2+x-1)e^x-\left((2x+1)e^x-2e^x\right)+C=(x^2-x)e^x+C\ .$$

8. $\int x^2 \ln 2x\, dx$.

Применим формулу интегрирования по частям. Обозначим $u=ln2x$, $dv=x^2dx$, тогда $du=(ln2x)'dx=(1/(2x))\cdot 2dx=(1/x)dx$, $v=x^3/3$.

$$\int x^2 \ln 2x\, dx=\ln(2x)\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln(2x)\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^2}{3}dx=$$

$$=\ln(2x)\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\ln(2x)\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{9}+C\ .$$

9. $\int x^3 e^{x^2} dx=\int x\cdot x^2 e^{x^2} dx=$.

Сделаем замену переменных: $t=x^2 \Rightarrow dt=(x^2)'dx=2x\cdot dx \Rightarrow xdx=(1/2)dt$. *Тогда*

$$=\int te^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int te^t dt=$$

Применим формулу интегрирования по частям. Обозначим $u=t$, $dv=e^t dt$, тогда $du=dt$, $v=e^t$.

$$\frac{1}{2}\left(te^t-\int e^t dt\right)=\frac{1}{2}\left(te^t-e^t\right)+C=\frac{e^t}{2}(t-1)+C=\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C\ .$$

10. $\int\frac{6x^3-7x^2-16x-5}{6x^3+11x^2+6x+1}dx$.

Выделим целую часть интегрируемой функции. Для этого к числителю добавим и вычтем три последних слагаемых знаменателя:

$$\frac{6x^3-7x^2-16x-5}{6x^3+11x^2+6x+1}=\frac{6x^3+11x^2+6x+1-11x^2-6x-1-7x^2-16x-5}{6x^3+11x^2+6x+1}=1+\frac{-18x^2-22x-6}{6x^3+11x^2+6x+1}\ .$$

Разложим знаменатель на множители, для чего необходимо заметить, что (-1) является его корнем. После чего вычленим сомножитель $(x+1)$ из знаменателя: $6x^3+11x^2+6x+1=6x^3+6x^2+5x^2+5x+x+1=6x^2(x+1)+5x(x+1)+(x+1)=(x+1)(6x^2+5x+1)=$ $=(x+1)\cdot 6(x-(-1/2))(x-(-1/3))=6(x+1)(x+1/2)(x+1/3)=(x+1)(2x+1)(3x+1)$. Теперь интегрируемая функция равна $1+\frac{-18x^2-22x-6}{6x^3+11x^2+6x+1}=1+\frac{-18x^2-22x-6}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}$

Получившуюся правильную дробь разложим на простейшие дроби:

$\frac{-18x^2-22x-6}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{3x+1}$. Здесь A, B и C неизвестные параметры.

Подберём их, так, чтобы выполнялось равенство. Для этого приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{3x+1}=\frac{A(2x+1)(3x+1)+B(x+1)(3x+1)+C(x+1)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}=$$

$=\frac{(6A+3B+2C)x^2+(5A+4B+3C)x+(A+B+C)}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}$. Приравняем числители.

В числителях обеих дробей стоят многочлены, и они будут равны друг другу при соответственном равенстве их коэффициентов.

$\begin{cases}6A+3B+2C=-18,\\5A+4B+3C=-22,\\A+B+C=-6.\end{cases}$ Это система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными и

она решается известным способом: $\begin{cases}3A-C=0\\A-C=2\\A+B+C=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=3A\\A-3A=2\\A+B+3A=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=-3,\\A=-1,\\B=-2.\end{cases}$

Преобразования исходной функции завершены, можно приступать к интегрированию:

$$\int\frac{6x^3-7x^2-16x-5}{6x^3+11x^2+6x+1}dx=\int\left(1+\frac{-1}{x+1}+\frac{-2}{2x+1}+\frac{-3}{3x+1}\right)dx=\int 1\,dx-\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{2\,dx}{2x+1}-\int\frac{3\,dx}{3x+1}=$$

Сделаем три замены переменных: $u=x+1 \Rightarrow du=(x+1)'dx=1dx=dx$, $v=2x+1 \Rightarrow dv=(2x+1)'dx=2dx$, $w=3x+1 \Rightarrow dw=(3x+1)'dx=3dx$. Тогда

$$=x-\int\frac{du}{u}-\int\frac{dv}{v}-\int\frac{dw}{w}=x-\ln|u|-\ln|v|-\ln|w|+c=x-\ln|x+1|-\ln|x+2|-\ln|x+3|+c$$

11. $\int\frac{dx}{x(1-x)^2}$.

Разложим интегрируемую функцию на простейшие дроби:

$\frac{1}{x(1-x)^2}=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$. Здесь A, B и C неизвестные параметры. Подберём их, так, чтобы выполнялось равенство. Для этого приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}=\frac{A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Cx}{x(x-1)^2}=$$

$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}$. Приравняем числители. В числителях обеих дробей стоят многочлены, и они будут равны друг другу при соответственном равенстве их коэффициентов.

$\begin{cases}A+B=0,\\ -2A-B+C=0,\\ A=1.\end{cases}$ Из этих уравнений по цепочке легко получаются $B=-1$ и $C=1$.

Теперь проинтегрируем полученное разложение: $\int\frac{dx}{x(1-x)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=$

Сделаем замену переменных: $t=x-1 \Rightarrow dt=(x-1)'dx=1dx=dx$. Тогда

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t^2}=\ln|x|-\ln|t|-\frac{1}{t}+c=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c.$$

12. $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$.

Разложим интегрируемую функцию на простейшие дроби:

$\frac{x^2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$. Здесь A, B и C неизвестные параметры. Подберём их, так, чтобы выполнялось равенство. Для этого приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)}{(x^2+1)(x-1)}$. Приравняем числители. В числителях обеих дробей стоят многочлены, и они будут равны друг другу при соответственном равенстве их коэффициентов.

$\begin{cases}A+B=1,\\ C-B=0,\\ A-C=0.\end{cases}$ Из второго и третьего уравнений следует, что $A=C=B$. А из первого следует ещё, что $A=B=C=1/2$. Теперь проинтегрируем полученное разложение:

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x-1)}=\int\left(\frac{1/2}{x-1}+\frac{x/2+1/2}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$

Сделаем две замены переменных: $t=x-1 \Rightarrow dt=(x-1)'dx=1dx=dx$, $v=x^2+1 \Rightarrow dv=(x^2+1)'dx=2xdx$, $\Rightarrow xdx=(1/2)dv$. Тогда

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t}+\int\frac{{}^{1}\!/_{2}\,dv}{v}+\operatorname{arctg}x\right)=\frac{1}{2}\left(\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|v|+\operatorname{arctg}x\right)+c=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\operatorname{arctg}x\right)+c=\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x\right)+c\ .$$